

LIMITE D'UNE FONCTION

Généralement, les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qu'on manipule en analyse sont définies sur des intervalles, mais il arrive qu'elles le soient sur des réunions finies d'intervalles — par exemple $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$. Pour cette raison, dans tout ce chapitre, les lettres $I, J \dots$ désignent des **RÉUNIONS** finies d'intervalles de $\mathbb{R}$ — éventuellement des intervalles de $\mathbb{R}$, mais pas forcément.

Définition (Adhérence d'une réunion finie d'intervalles) On note $I_1, I_2, \dots, I_r$ les intervalles disjoints dont I est la réunion, a_1 et b_1 les bornes de I_1 avec $a_1 \leq b_1$, a_2 et b_2 les bornes de I_2 avec $a_2 \leq b_2 \dots$ et a_r et b_r les bornes de I_r avec $a_r \leq b_r$. On appelle *adhérence* de I et on note $\bar{I}$ l'ensemble $\bar{I} = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \dots \cup [a_r, b_r]$.

Exemple $\overline{[0, 1[} = [0, 1]$, $\overline{[0, \infty[} = [0, \infty]$ (fermé à droite en ∞) et $\overline{\mathbb{R}^*} = \mathbb{R}$.

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application et $a \in \bar{I}$. On dit que f vérifie une certaine propriété $\mathcal{P}$ *au voisinage de a* s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ sur $I \cap \mathcal{V}$.

Exemple

- La fonction sinus est croissante au voisinage de 0 car elle est croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
- La fonction cosinus est minorée par $\frac{1}{2}$ au voisinage de 0 car elle est minorée par $\frac{1}{2}$ sur $]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}[$.

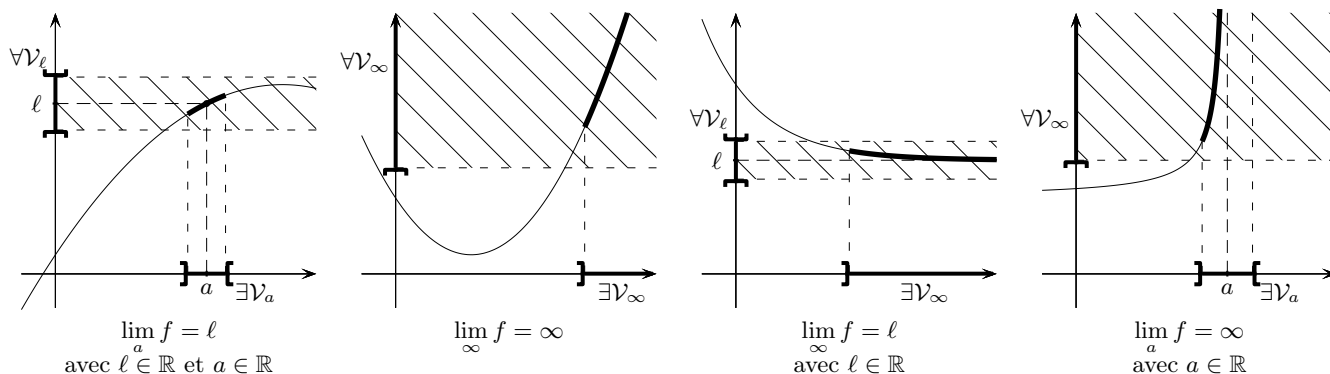
1 DÉFINITIONS DE LA LIMITE D'UNE FONCTION

1.1 LIMITE D'UNE FONCTION EN UN POINT

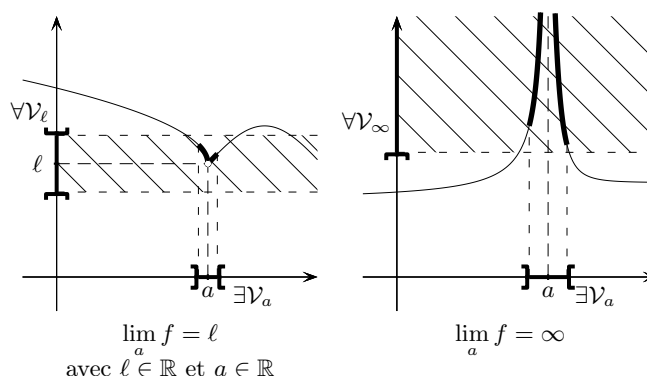
Définition (Limite d'une fonction en un point) Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application, $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$. On dit que f *admet ℓ pour limite en a* si :

pour tout voisinage $\mathcal{V}_\ell$ de ℓ , il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a tel que : $\forall x \in I \cap \mathcal{V}_a, \quad f(x) \in \mathcal{V}_\ell$.

🐞 🐞 🐞 **Explication** Bien comprendre les figures suivantes !



Et dans le cas où I est une réunion d'intervalles et où a est à la jonction de deux intervalles sans appartenir au domaine de définition :



Théorème (Unicité de la limite) Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application et $a \in \bar{I}$.

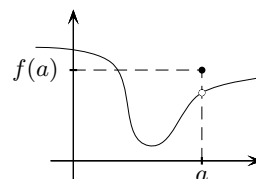
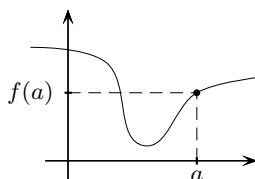
(i) Si f possède une limite en a , celle-ci est unique, notée $\lim_a f$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Pour tout $\ell \in \mathbb{R}$, la relation $\lim_a f = \ell$ se note souvent $f \xrightarrow[a]{\ell}$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

(ii) Si $a \in I$ et si f possède une limite en a , alors $\lim_a f = f(a)$.

🐞 🐞 🐞 **Explication** Pour l'assertion (ii) :

f est définie en a
et $\lim_a f = f(a)$.



f est définie en a
mais $\lim_a f$ n'existe pas.

Pourtant nous verrons
que $\lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f$.

Démonstration

(i) Par l'absurde, faisons l'hypothèse que f possède deux limites ℓ et ℓ' **distinctes**. Il existe alors un voisinage $\mathcal{V}_\ell$ de ℓ et un voisinage $\mathcal{V}_{\ell'}$ de ℓ' **disjoints**. Or par hypothèse sur f , il existe deux voisinages $\mathcal{V}_a$ et $\mathcal{V}'_a$ de a tels que : $\forall x \in I \cap \mathcal{V}_a, f(x) \in \mathcal{V}_\ell$ et $\forall x \in I \cap \mathcal{V}'_a, f(x) \in \mathcal{V}_{\ell'}$.

Donnons-nous finalement $x \in I \cap \mathcal{V}_a \cap \mathcal{V}'_a$ — un tel x existe car $I \cap \mathcal{V}_a \cap \mathcal{V}'_a$ est non vide. Alors $f(x) \in \mathcal{V}_\ell \cap \mathcal{V}_{\ell'}$, alors que nous avons choisi $\mathcal{V}_\ell$ et $\mathcal{V}_{\ell'}$ disjoints — contradiction !

(ii) Faisons l'hypothèse que f est définie en a — i.e. $a \in I$ — et possède une limite ℓ en a .

Peut-on avoir alors $\ell = \infty$? Si c'était le cas, il existerait un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a tel que $f(x) \in]f(a), \infty[$ pour tout $x \in I \cap \mathcal{V}_a$. Pour $x = a$, on aurait en particulier $f(a) \in]f(a), \infty[$ — contradiction. Bref, $\ell \neq \infty$, et on pourrait montrer de même que $\ell \neq -\infty$. Conclusion : $\ell \in \mathbb{R}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc par hypothèse un voisinage $\mathcal{V}'_a$ de a tel que $f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ pour tout $x \in I \cap \mathcal{V}'_a$. En particulier, pour $x = a$: $\forall \varepsilon > 0, |f(a) - \ell| < \varepsilon$. Sous l'hypothèse que $\ell \neq f(a)$, ce résultat est contradictoire pour $\varepsilon = \frac{|f(a) - \ell|}{2}$, donc forcément $\ell = f(a)$ comme voulu. ■

🔧 🔧 🔧 **En pratique** La définition générale de la limite en termes de voisinages est hors programme. Il est en revanche impératif que vous connaissiez sur le bout des doigts ses neuf reformulations ci-dessous. Aidez-vous des figures de la page précédente.

Définition (Les 9 limites) Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application, $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$.

• **Cas où $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$:**

$$\lim_a f = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in I, |x - a| < \alpha \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

• **Cas où $\ell = \infty$ et $a = \infty$:**

$$\lim_{\infty} f = \infty \iff \forall A > 0, \exists B > 0 / \forall x \in I, x > B \implies f(x) > A.$$

• **Cas où $\ell = -\infty$ et $a = \infty$:**

$$\lim_{\infty} f = -\infty \iff \forall A < 0, \exists B > 0 / \forall x \in I, x > B \implies f(x) < A.$$

• **Cas où $\ell = \infty$ et $a = -\infty$:**

$$\lim_{-\infty} f = \infty \iff \forall A > 0, \exists B < 0 / \forall x \in I, x < B \implies f(x) > A.$$

• **Cas où $\ell = -\infty$ et $a = -\infty$:**

$$\lim_{-\infty} f = -\infty \iff \forall A < 0, \exists B < 0 / \forall x \in I, x < B \implies f(x) < A.$$

• **Cas où $\ell \in \mathbb{R}$ et $a = \infty$:**

$$\lim_{\infty} f = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists B > 0 / \forall x \in I, x > B \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

• **Cas où $\ell \in \mathbb{R}$ et $a = -\infty$:**

$$\lim_{-\infty} f = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists B < 0 / \forall x \in I, x < B \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

- **Cas où $\ell = \infty$ et $a \in \mathbb{R}, a \notin I$:**

$$\lim_a f = \infty \iff \forall A > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in I, |x - a| < \alpha \implies f(x) > A.$$

- **Cas où $\ell = -\infty$ et $a \in \mathbb{R}, a \notin I$:**

$$\lim_a f = -\infty \iff \forall A < 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in I, |x - a| < \alpha \implies f(x) < A.$$

XXXX Attention ! Dans ces définitions, les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ ne doivent être permutés sous aucun prétexte. On peut montrer en revanche que les inégalités strictes peuvent être remplacées si on le souhaite par des inégalités larges.

Exemple $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{\sqrt{x-1}} = \infty.$

En effet Nous devons montrer que : $\forall A > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in]1, \infty[, |x-1| < \alpha \implies \frac{x+2}{\sqrt{x-1}} > A.$

Soit $A > 0$. Pour tout $x \in]1, \infty[$, minorons : $\frac{x+2}{\sqrt{x-1}} \geq \frac{3}{\sqrt{x-1}} \geq \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$

On minore en **simplifiant** et en vérifiant que ce par quoi on minore **tend toujours vers ∞** quand x tend vers 1.

On arrête de minorer quand on se sent capable de trouver α .

On remarque alors que : $\frac{1}{\sqrt{x-1}} > A \iff \sqrt{x-1} < \frac{1}{A} \iff |x-1| < \frac{1}{A^2}.$ Posons donc $\alpha = \frac{1}{A^2}.$

D'après ce qui précède : $\forall x \in]1, \infty[, |x-1| < \alpha \implies \frac{1}{\sqrt{x-1}} > A.$

Exemple $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1.$

En effet Nous devons montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0 / \forall x \in \mathbb{R}, x > B \implies \left| \frac{x^2}{x^2+1} - 1 \right| < \varepsilon.$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, majorons : $\left| \frac{x^2}{x^2+1} - 1 \right| = \frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2}.$

On majore en **simplifiant** et en vérifiant que ce par quoi on majore **tend toujours vers 0** quand x tend vers ∞ .

On arrête de majorer quand on se sent capable de trouver B .

On remarque alors que pour tout $x > 0$: $\frac{1}{x^2} < \varepsilon \iff x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$ Posons donc $B = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$

D'après ce qui précède : $\forall x \in \mathbb{R}, x > B \implies \left| \frac{x^2}{x^2+1} - 1 \right| < \varepsilon.$

Exemple $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x) = \infty.$

En effet Nous devons montrer que : $\forall A > 0, \exists B > 0 / \forall x \in \mathbb{R}, x > B \implies x^2 - x > A.$

Soit $A > 0$. Pour tout $x \geq 2$, comme $x-1 \geq 1$: $x^2 - x = x(x-1) \geq x.$

On minore en **simplifiant** et en vérifiant que ce par quoi on minore **tend toujours vers ∞** quand x tend vers ∞ .

On arrête de majorer quand on se sent capable de trouver B .

Posons donc $B = \max \{2, A\}.$ D'après ce qui précède : $\forall x \in \mathbb{R}, x > B \implies x^2 - x > A.$

Théorème (Limite et caractère borné) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}.$ Si f possède une limite **finie** en a , alors f est bornée au voisinage de $a.$

Démonstration Par hypothèse, il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a tel que : $\forall x \in I \cap \mathcal{V}_a, |f(x) - \ell| < 1.$ En particulier : $|f(x)| = |(f(x) - \ell) + \ell| \leq |f(x) - \ell| + |\ell| \leq |\ell| + 1,$ donc f est bornée sur $I \cap \mathcal{V}_a.$ ■

1.2 LIMITES D'UNE FONCTION À GAUCHE/À DROITE EN UN POINT

Définition (Limite d'une fonction à gauche/à droite en un point) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$.

- Si f est définie au voisinage de a à gauche, on dit que f admet ℓ pour limite à gauche en a si $f|_{I \cap]-\infty, a[}$ admet ℓ pour limite en a . En tant que limite, la limite de f en a à gauche, si elle existe, est unique et notée $\lim_{a^-} f$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.
- Si f est définie au voisinage de a à droite, on dit que f admet ℓ pour limite à droite en a si $f|_{I \cap]a, \infty[}$ admet ℓ pour limite en a . En tant que limite, la limite de f en a à droite, si elle existe, est unique et notée $\lim_{a^+} f$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

 **En pratique** Ces définitions sont un peu abstraites. Vous devez surtout retenir leurs reformulations « en situation ». Les voici dans le cas des limites **à gauche** :

- **Cas où $\ell \in \mathbb{R}$:** $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in I, a - \alpha < x < a \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$
- **Cas où $\ell = \infty$:** $\forall A > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in I, a - \alpha < x < a \implies f(x) > A.$
- **Cas où $\ell = -\infty$:** $\forall A < 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in I, a - \alpha < x < a \implies f(x) < A.$

Exemple $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty.$

En effet Soit $A > 0$. Nous cherchons $\alpha > 0$ tel que : $\forall x \in]0, \alpha[, \frac{1}{x} > A.$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* : \frac{1}{x} > A \iff x < \frac{1}{A}.$ Nous pouvons donc choisir $\alpha = \frac{1}{A}.$

Théorème (Caractérisation de la limite à l'aide des limites à gauche/à droite) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$. On suppose f définie au voisinage de a à gauche et à droite.

- (i) Si $a \in I$: $\lim_a f = \ell \iff \lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f = \ell$ et $\ell = f(a)$
- (ii) Si $a \notin I$: $\lim_a f = \ell \iff \lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f = \ell.$

✖✖✖ Attention ! Dans l'assertion (i), la précision « $\ell = f(a)$ » est indispensable : lorsque f est définie en a , on peut très bien avoir $\lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f$ sans que f ait une limite en a . Pour vous en convaincre, jetez un œil aux figures du haut de la page 2.

Démonstration Montrons seulement (i).

- Si $\lim_a f = \ell$, nous avons déjà montré qu'alors $\ell = f(a)$. On obtient les limites $\lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f = \ell$ par simple **restriction** du domaine à $I \cap]-\infty, a[$ et $I \cap]a, \infty[$ dans la définition de la limite $\lim_a f = \ell$.
- Réciproquement, supposons qu'on ait $\lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f = \ell = f(a)$ — alors en particulier $\ell \in \mathbb{R}$. Nous voulons montrer que $\lim_a f = \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha^- > 0$ et $\alpha^+ > 0$ tels que pour tout $x \in I$:

$$(a - \alpha^- < x < a \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon) \quad \text{et} \quad (a < x < a + \alpha^+ \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

Posons $\alpha = \min\{\alpha^-, \alpha^+\}$ et donnons-nous $x \in I$ tel que $|x - a| < \alpha$, i.e. $a - \alpha < x < a + \alpha$. Alors :

- 1) si $a - \alpha < x < a$, on a en fait $a - \alpha^- < x < a$, donc $|f(x) - \ell| < \varepsilon$;
- 2) si $x = a$, $|f(x) - \ell| = |f(a) - \ell| = 0 < \varepsilon$;
- 3) si $a < x < a + \alpha$, on a en fait $a < x < a + \alpha^+$, donc $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Dans tous les cas, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. C'est terminé. ■

Exemple On note f la fonction $x \mapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x \geq 0 \\ 1 - x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors $\lim_0 f = 1$.

En effet Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$, **et puisque** $f(0) = 1$, le théorème précédent affirme bien, comme annoncé, que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

2 PROPRIÉTÉS DES LIMITES DE FONCTIONS

2.1 CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE DE LA LIMITE D'UNE FONCTION

« Caractérisation *séquentielle* » signifie « caractérisation en termes de suites ». Le théorème suivant contient en particulier le résultat que nous avons appelé « Composition à gauche par une fonction » dans notre chapitre « Limite d'une suite ». Nous l'utilisons jusqu'ici sans l'avoir démontré.

Théorème (Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction) Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application, $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\lim_a f = \ell$.
- (ii) Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite a à valeurs dans I , la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite ℓ .

Démonstration

(i) $\Rightarrow$ (ii) On suppose que $\lim_a f = \ell$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de limite a à valeurs dans I . Nous devons montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \ell$. Soit $\mathcal{V}_\ell$ un voisinage de ℓ . Puisque $\lim_a f = \ell$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a tel que : $\forall x \in I \cap \mathcal{V}_a, f(x) \in \mathcal{V}_\ell$. Mais $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$, donc $u_n \in \mathcal{V}_a$ à partir d'un certain rang N . Finalement, pour tout $n \geq N$, $u_n \in I \cap \mathcal{V}_a$ donc $f(u_n) \in \mathcal{V}_\ell$. Cela montre bien que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \ell$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Au lieu de travailler avec des voisinages, travaillons dans le cas particulier où $a, \ell \in \mathbb{R}$ pour varier. Par contraposition, supposons donc que f n'admet pas ℓ pour limite. Il existe alors $\varepsilon_0 > 0$ tel que :

$$\forall \alpha > 0, \quad \exists x \in I / \quad |x - a| < \alpha \quad \text{et} \quad |f(x) - \ell| \geq \varepsilon_0 \quad \star.$$

Nous devons en déduire l'existence d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite a à valeurs dans I telle que $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ n'admette pas ℓ pour limite. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, utilisons $\star$ avec la valeur $\alpha = \frac{1}{n}$. Cela nous donne un élément $u_n \in I$ tel que $|u_n - a| < \frac{1}{n}$ et $|f(u_n) - \ell| \geq \varepsilon_0$. Ce procédé de construction nous fournit bien une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de limite a à valeurs dans I telle que $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ n'admette pas ℓ pour limite. ■

Exemple Puisque $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} n! = \infty$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n!) = \infty$.

Exemple La limite $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ n'existe pas.

En effet Pour commencer : $\lim_{n \rightarrow \infty} n\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \infty$. Pourtant : $\sin(n\pi) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, et bien sûr $1 \neq 0$. On conclut grâce à la caractérisation séquentielle de la limite.

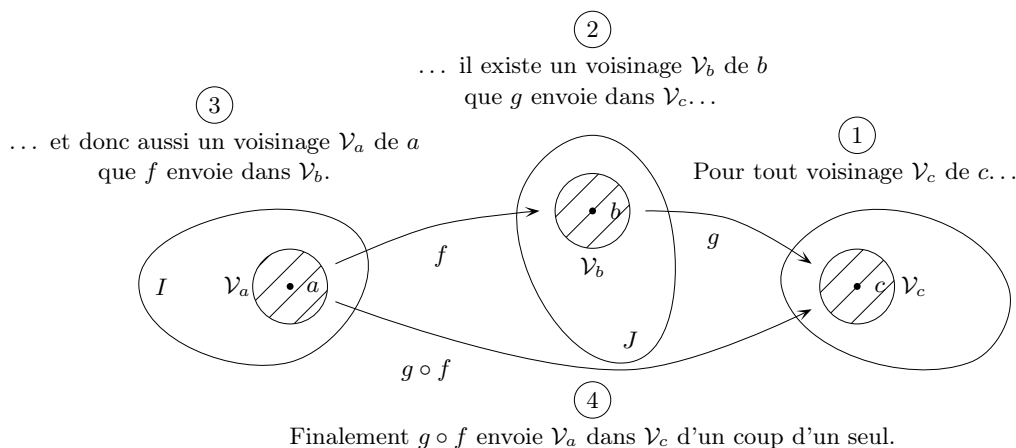
2.2 OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

Pour cette partie du cours, allez faire un tour du côté des limites de suites. Il se passe avec les fonctions la même chose qu'avec les suites pour les opérations de somme, produit, multiplication par un scalaire et inverse — en particulier, mêmes formes indéterminées. Pour ne pas perdre de temps inutilement, nous ne nous arrêterons pas davantage sur ces résultats.

Théorème (Limite et composition) Soient $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications, $a \in \bar{I}$, $b \in \bar{J}$ et $c \in \mathbb{R}$.

$$\text{Si } \lim_a f = b \quad \text{et si } \lim_b g = c, \quad \text{alors } \lim_a g \circ f = c.$$

Démonstration L'idée de la preuve est résumée par la figure ci-après. Soit $\mathcal{V}_c$ un voisinage de c . Puisque $\lim_b g = c$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_b$ de b tel que : $\forall x \in J \cap \mathcal{V}_b, g(x) \in \mathcal{V}_c$. Du coup, puisque $\lim_a f = b$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a tel que : $\forall x \in I \cap \mathcal{V}_a, f(x) \in \mathcal{V}_b$. Enfin, par composition : $\forall x \in I \cap \mathcal{V}_a, g \circ f(x) \in \mathcal{V}_c$. Comme voulu, $\lim_a g \circ f = c$. ■



En pratique Vous devez savoir appliquer parfaitement ce théorème de composition des limites. Pour montrer par exemple que $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{e^{-2x} + 1}{(e^{-x} + 1)^2} = 0$, il faut savoir dans quel ordre et avec quelles fonctions élémentaires cette limite est construite.

On peut, **au brouillon**, représenter la situation de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-x} = y & \longmapsto & \frac{y^2 + 1}{(y + 1)^2} = z & \longmapsto & \ln z. \end{array} \right.$$

Une fois qu'on a fait ça, c'est facile, on n'a plus qu'à remarquer que $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$, $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 + 1}{(y + 1)^2} = 1$ et $\lim_{z \rightarrow 1} \ln z = 0$.

2.3 PASSAGE À LA LIMITE ET RELATION D'ORDRE

Théorème (Limites et inégalités strictes) Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application, $a \in \bar{I}$ et $m, M \in \mathbb{R}$.

- (i) Si $\lim_a f < M$, alors $f(x) < M$ au voisinage de a .
- (ii) Si $\lim_a f > m$, alors $f(x) > m$ au voisinage de a .

Attention ! Résultats faux avec des inégalités **larges** ! Par exemple, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \leq 0$, mais $\frac{1}{x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Démonstration Prouvons seulement l'assertion (ii). Posons $\ell = \lim_a f$. Si $\ell = \infty$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a tel que : $\forall x \in I \cap \mathcal{V}_a, f(x) \in]m, \infty[$. Si au contraire $\ell \in \mathbb{R}$, sachant que $\ell - m > 0$ par hypothèse, il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a tel que : $\forall x \in I \cap \mathcal{V}_a, f(x) \in]\ell - (\ell - m), \ell + (\ell - m)[\subseteq]m, \infty[$. Dans les deux cas, $f(x) > m$ au voisinage de a . ■

Théorème (Limites et inégalités larges) Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications et $a \in \bar{I}$. On suppose que f et g possèdent des limites finies en a .

$$\text{Si } f(x) \leq g(x) \text{ au voisinage de } a, \text{ alors } \lim_a f \leq \lim_a g.$$

Ce résultat est utilisé le plus souvent lorsque l'une des deux fonctions est constante.

Attention ! Résultat faux avec des inégalités **strictes** ! Par exemple, $\frac{1}{x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, mais $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Démonstration Par hypothèse, $g(x) - f(x) \geq 0$ au voisinage de a . Raisonnons par l'absurde en supposant que $\lim_a (g - f) < 0$. Le théorème précédent affirme alors que $g(x) - f(x) < 0$ au voisinage de a — contradiction. Conclusion : $\lim_a (g - f) \geq 0$ et c'est fini. ■

3 THÉORÈMES D'EXISTENCE DE LIMITES POUR LES FONCTIONS

3.1 THÉORÈME DES GENDARMES, THÉORÈMES DE MINORATION/MAJORATION

Théorème Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $m : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $M : I \rightarrow \mathbb{R}$ trois applications, $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

- (i) **Théorème des gendarmes/de l'encadrement** : Si $\lim_a m = \lim_a M = \ell$ et si $m(x) \leq f(x) \leq M(x)$ au voisinage de a , alors $\lim_a f$ existe et vaut ℓ .
- (ii) **Théorème de minoration** : Si $\lim_a m = \infty$ et si $f(x) \geq m(x)$ au voisinage de a , alors $\lim_a f$ existe et vaut ∞ .
- (iii) **Théorème de majoration** : Si $\lim_a M = -\infty$ et si $f(x) \leq M(x)$ au voisinage de a , alors $\lim_a f$ existe et vaut $-\infty$.

Démonstration Pour (i), soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a sur lequel $m(x) \leq f(x) \leq M(x)$, un voisinage $\mathcal{V}'_a$ sur lequel $m(x) > \ell - \varepsilon$ et un voisinage $\mathcal{V}''_a$ sur lequel $M(x) < \ell + \varepsilon$. Posons $\mathcal{V}_a^0 = \mathcal{V}_a \cap \mathcal{V}'_a \cap \mathcal{V}''_a$, qui est un voisinage de a . Pour tout $x \in I \cap \mathcal{V}_a^0$: $\ell - \varepsilon < m(x) \leq f(x) \leq M(x) < \ell + \varepsilon$, donc $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. ■

Le théorème des gendarmes est souvent utilisé sous l'une des deux formes suivantes, que vous démontrerez seuls :

Corollaire Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications et $a \in \bar{I}$.

- Si $|f(x)| \leq \varepsilon(x)$ au voisinage de a et si $\lim_a \varepsilon = 0$, alors $\lim_a f = 0$.
- Si f est bornée au voisinage de a et si $\lim_a \varepsilon = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x)f(x) = 0$.

Exemple $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ car la fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ est bornée et $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$.

3.2 THÉORÈME DE LA LIMITE MONOTONE

Théorème (Théorème de la limite monotone) Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

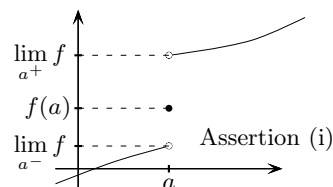
Si f est monotone, alors $\lim_{a^-} f$ et $\lim_{a^+} f$ existent pour tout $a \in \bar{I}$

(du moins pour peu que f soit définie à gauche/droite de a).

Plus précisément, dans le cas où f est **croissante** :

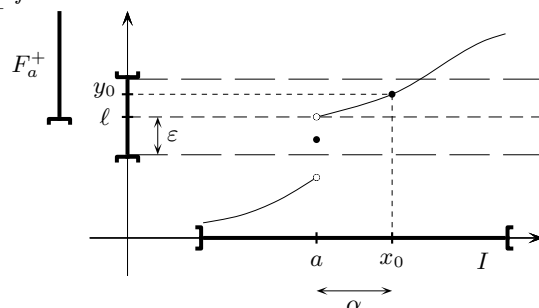
- (i) Pour tout $a \in I$, si f est définie au voisinage de a à gauche et à droite, alors $\lim_{a^-} f$ et $\lim_{a^+} f$ existent, sont **finies** et vérifient : $\lim_{a^-} f \leq f(a) \leq \lim_{a^+} f$.
- (ii) $\lim_{\inf I^+} f$ existe. Cette limite est finie si f est minorée ; elle vaut $-\infty$ sinon.
- (iii) $\lim_{\sup I^-} f$ existe. Cette limite est finie si f est majorée ; elle vaut ∞ sinon.

Si f est décroissante, on dispose bien entendu d'un résultat analogue.



Démonstration Montrons seulement l'assertion (i). Soit $a \in I$. On suppose f définie au voisinage de a à droite. Nous allons montrer l'existence de $\lim_{a^+} f$ et l'inégalité : $f(a) \leq \lim_{a^+} f$.

- Posons $F_a^+ = f(I \cap]a, \infty[)$. La fonction f étant croissante, pour tout $x \in I \cap]a, \infty[$: $f(a) \leq f(x)$, donc F_a^+ est une partie de $\mathbb{R}$ minorée par $f(a)$, et par ailleurs non vide car f est définie au voisinage de a à droite. L'existence du réel $\ell = \inf F_a^+$ découle alors de la propriété de la borne inférieure et de plus : $f(a) \leq \ell$.



- Montrons que $\lim_{a^+} f = \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Le réel $\ell + \varepsilon$ n'est pas un minorant de F_a^+ car ℓ en est le plus petit. Il existe donc $y_0 \in F_a^+$ tel que $y_0 < \ell + \varepsilon$, et en fait $y_0 = f(x_0)$ pour un certain $x_0 \in I \cap]a, \infty[$. Posons alors $\alpha = x_0 - a > 0$. Pour tout $x \in I$ tel que $a < x < a + \alpha = x_0$: $\ell - \varepsilon < \ell \leq f(x) \leq f(x_0) = y_0 < \ell + \varepsilon$, car d'une part f est croissante et d'autre part $\ell = \inf F_a^+$.
Conclusion : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in I, a < x < a + \alpha \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$, i.e. $\lim_{a^+} f = \ell$. ■

4 EXTENSION AU CAS DES FONCTIONS COMPLEXES

Nous allons brièvement étendre les résultats que nous avons obtenu pour les fonctions réelles aux fonctions complexes.

*** **Attention !** Pas d'inégalités dans $\mathbb{C}$, donc pas de fonctions complexes majorées/minorées/monotones ! Hélas !

Chose remarquable : la notion de fonction bornée a toujours un sens.

Définition (Fonction bornée) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une application. On dit que f est *bornée* s'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in I, |f(x)| \leq K.$$

Définition (Limite d'une fonction complexe en un point) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une application, $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que f admet ℓ pour limite en a si :

$$\text{pour tout voisinage } \mathcal{V}_\ell \text{ de } \ell, \text{ il existe un voisinage } \mathcal{V}_a \text{ de } a \text{ tel que : } \forall x \in I \cap \mathcal{V}_a, f(x) \in \mathcal{V}_\ell.$$

Cela revient à dire que $\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - \ell| = 0$, ce qui nous ramène au cas des limites de fonctions réelles.

Le théorème d'unicité de la limite est encore valable.

*** **Explication** Même définition que dans le cas des fonctions réelles. La seule modification, c'est l'allure des voisinages.

Théorème (Caractérisation de la limite à partir des parties réelle et imaginaire) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

$$(i) \quad \lim_a f = \ell. \quad (ii) \quad \lim_a \operatorname{Re}(f) = \operatorname{Re}(\ell) \quad \text{et} \quad \lim_a \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(\ell).$$

Démonstration

(i) $\implies$ (ii) Il est connu que : $|\operatorname{Re}(f) - \operatorname{Re}(\ell)| = |\operatorname{Re}(f - \ell)| \leq |f - \ell|$. Du coup, si $\lim_a f = \ell$, le théorème des gendarmes pour les fonctions **réelles** montre que $\lim_a \operatorname{Re}(f) = \operatorname{Re}(\ell)$.

(ii) $\implies$ (i) Au départ : $|f - \ell| = \sqrt{(\operatorname{Re}(f) - \operatorname{Re}(\ell))^2 + (\operatorname{Im}(f) - \operatorname{Im}(\ell))^2}$. Du coup, si $\lim_a \operatorname{Re}(f) = \operatorname{Re}(\ell)$ et $\lim_a \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(\ell)$, on obtient bien $\lim_a f = \ell$ par opérations sur les limites de fonctions **réelles**. ■

Exemple $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} = 0$ car $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{1+x^2} = 0$.

Il est toujours vrai qu'une fonction possédant une limite finie en un point est bornée au voisinage de ce point.

Les notions de limite à gauche et à droite, ainsi que la caractérisation de la limite en termes de limite à gauche et à droite, sont maintenues pour les fonctions complexes. La caractérisation séquentielle de la limite est également maintenue, de même que les résultats sur les opérations d'addition, produit, multiplication par un scalaire et inverse, à ceci près que les symboles $\pm\infty$ sont bannis.

Les grands théorèmes d'existence de limites n'ont pas de sens dans le cas des fonctions complexes car ils utilisent de façon essentielle la relation d'ordre naturelle $\leq$ sur $\mathbb{R}$.